Examen du cours 2.33.1 : Théorie des calculs pour les phénomènes émergents

Problème 1

On considère un système constitué de N agents notés $1, \ldots, N$. Chaque agent i possède une valeur initiale v_i qui est un nombre réel. L'objectif est de résoudre *le problème de la moyenne*, c'est-à-dire de construire un algorithme dans lequel chaque agent calcule *asymptotiquement* la moyenne des valeurs initiales, i.e.,

$$\frac{v_1 + \cdots + v_N}{N} \ .$$

Dans un premier temps, on suppose que la topologie est un graphe de communication bidirectionnel fixe G connexe et avec une auto-boucle à chaque nœud. Chaque agent i exécute l'algorithme EqualNeighbor sur deux variables y_i et z_i initialisées respectivement à

$$y_i(0) := 1/d_i \quad \text{et} \quad z_i(0) := v_i/d_i \ ,$$

où d_i désigne le degré (c'est-à-dire le nombre de voisins) de i dans le graphe G. De plus, à chaque round t, l'agent i calcule $x_i(t) = z_i(t)/y_i(t)$.

Question 1.1. Donner le vecteur de Perron de la matrice (stochastique) correspondant à chaque round de l'algorithme EqualNeighbor.

Question 1.2. Montrer que, pour chaque agent i, les trois suites $\big(y_i(t)\big)$, $\big(z_i(t)\big)$ et $\big(x_i(t)\big)$ sont convergentes et calculer leur limite. Conclure.

On souhaite maintenant généraliser ce résultat au cas où la topologie de communication n'est pas fixe. On considère donc des patterns de communication $\mathcal{G} = \big(G_t\big)_{t \in \mathbb{N}^*}$ constitués de graphes de communication qui sont tous bidirectionnels et on suppose que, pour chaque pattern $\mathcal{G}$, le graphe G_∞ des arcs qui apparaissent une infinité de fois est connexe.

Question 1.3. Dans le cas où chaque agent connaît le nombre N d'agents, donner un algorithme distribué permettant de résoudre le problème de la moyenne.

On suppose maintenant que les agents ne connaissent pas N mais que chaque agent i connaît une borne supérieure q_i sur son degré, i.e.,

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad q_i \geqslant d_i(t) \ .$$

Question 1.4. Sous cette hypothèse, donner un algorithme permettant de résoudre le problème de la moyenne.

Question 1.5. Même question lorsque chaque agent i, au lieu de connaître une borne q_i, dispose pour chaque round t du degré $d_j(t)$ de ses voisins j dans le graphe G_t.

Question 1.6. Pour chacun des deux algorithmes ci-dessus, donner un majorant du taux de convergence $\varrho = \lim_{t\to+\infty} \|x(t) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i\|^{1/t}$ pour des pattern de communication $\mathcal{G}$ constitués de graphes de communication qui sont tous bidirectionnels et connexes.

Dans cette dernière partie, on suppose à nouveau que la topologie est un graphe de communication *fixe* G mais on ne suppose pas que G est bidirectionnel. On considère alors un algorithme distribué $\mathcal{A}$ dans lequel la nouvelle valeur adoptée par l'agent i au round t est une combinaison linéaire des valeurs que i reçoit de ses voisins entrants

$$u_i(t) = \sum_{j\in In_i(t)} A_{ij} u_j(t-1)$$

avec $A_{ij} \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{N} A_{ij} = 1$. Autrement dit, la matrice correspondante A de taille $N \times N$ est une matrice positive colonne-stochastique ou encore A est positive et sa transposée A^T est stochastique.

Question 1.7. Donner un exemple d'un tel algorithme distribué.

Question 1.8. Trouver une condition sur G pour que la suite des itérés de A soit convergente ? Quelle est alors la limite ?

Question 1.9. Comment faut-il que chaque agent i initialise y_i et z_i pour que la suite $\big(x_i(t) = z_i(t)/y_i(t)\big)$ converge vers $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i$? Conclure.

Question 1.10.* Cette méthode est-elle généralisable à une topologie (non bidirectionnelle) variable ?

Problème 2

On se fixe un entier $d \geqslant 2$ et on considère un système de Hegselmann-Krause constitué d'un ensemble d'agents noté $\mathcal{A}$ se déplaçant dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$.

Question 2.1. Montrer que le système converge. Converge-t-il en temps fini ?

On partitionne maintenant l'ensemble $\mathcal{A}$ en

$$\mathcal{A} = \{V\} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{I} \ ,$$

où V est un agent particulier appelé *Vérité* et où les agents de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{I}$ sont appelés respectivement *chercheur de vérité* et *ignorant*. Le graphe d'influence du système est alors déterminé par les règles suivantes :

1. l'agent V est fixe ;
2. un chercheur de vérité est connecté à tout instant à l'agent V ;

3. un ignorant n'est jamais connecté à l'agent V ;
4. deux agents mobiles, i.e., deux agents de $\mathcal{C} \cup \mathcal{I}$, sont connectés si et seulement si il sont à une distance (euclidienne) inférieure ou égale à 1.

Quant à l'algorithme d'action, il est identique à celui de HK, i.e., coincide avec l'algorithme Equal-Neighbor.

Question 2.2 Que pouvez-vous dire des graphes d'influence de ce système ? Montrer que le système converge quelle que soit la configuration initiale des agents.

Question 2.3. Quelle est la position limite des agents ?

Question 2.4. Y-a-t-il convergence en temps fini ?