Examen du cours 2.33.1 : Théorie des calculs pour les phénomènes émergents

Exercice 1

Question 1.1. Donner un exemple d'un système composé de 2 agents où les hypothèses A1, A3, C et D sont vérifiées et pour lequel l'algorithme CC ne réalise pas un consensus asymptotique.

On considère maintenant un système constitué de 3 agents avec le modèle d'influence equal-neighbor (EN) et le vecteur initial $x(0) = (0, 0, 1)^T$. Ce système évolue de la façon suivante. Pendant une première période de longueur t_1, l'agent 1 n'est influencé que par lui-même et l'agent 3 ; quant aux agents 2 et 3, ils ne sont influencés que par eux-mêmes. Puis, pendant une seconde période de longueur t_2, l'agent 3 n'est influencé que par lui-même et l'agent 2 alors que les agents 1 et 2 ne sont influencés que par eux-mêmes. Vient ensuite une troisième période de longueur t_3 où l'agent 2 n'est influencé que par lui-même et l'agent 1 alors que les agents 1 et 3 ne sont influencés que par eux-mêmes. On répète alors cette séquence (de 3 périodes) infiniment souvent et on note t_i la longueur de la i-ème période de cette suite.

Question 1.2. Donner les trois matrices d'influence et leur graphe associé pour chacune de ces 3 périodes. Calculer la semi-norme N de chaque matrice.

On se donne une suite de réels strictement positifs $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < 1/2$.

Question 1.3. Montrer que l'on peut choisir t_1 et t_2 pour que

$$x_1(t_1) \geqslant 1 - \epsilon_1, \quad x_3(t_1 + t_2) \leqslant \epsilon_1.$$

De même, montrer que l'on peut choisir t_3 et t_4 pour que

$$x_2(t_1 + t_2 + t_3) \geqslant 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2, \quad x_1(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) \leqslant \epsilon_1 + \epsilon_2.$$

Question 1.4. Montrer que le système ne converge pas. Quelle conclusion peut-on tirer de cet exemple ?

Exercice 2

Les notations utilisées ici sont les mêmes que celles du cours. On considère un système composé de n agents avec des matrices d'influence vérifiant les hypothèses A1 (stochasticité), A2 (auto-boucles) et A3 (borne inférieure uniforme sur les coefficients strictement posififs). On suppose de plus la propriété suivante :

D1* : Il existe un agent $j_0 \in [n]$ tel que, à chaque instant $t \in \mathbb{N}$, le graphe $\big([n]\,, \cup_{s \geqslant t} E(s)\big)$ est j_0-orienté.

Question 2.1. Montrer que pour chaque instant $t_0 \in \mathbb{N}$, il existe un instant $t_1 \geqslant t_0$ tel que

$$\forall i \in [n], \quad A_{i\,j_0}(t_1 : t_0) > 0.$$

Pour un graphe dirigé quelconque G et tout nœud j_0 de G , on considère la propriété :

$\mathbf{P}_{j_0}$**:** tout sous-ensemble de nœuds de G contenant le nœud j_0 et ayant un arc sortant a aussi un arc entrant.

Question 2.2. Montrer que G satisfait la condition P_{j_0} si et seulement si (a) la composante connexe de j_0 dans G est j_0-orientée et (b) toutes les autres composantes connexes de G sont fortement connexes.

Question 2.3. En déduire une condition sur la suite des graphes de communication $G(t)$ pour que l'algorithme CC réalise un consensus asymptotique entre les agents du système.

Question 2.4. Donner une condition plus faible que celle trouvée dans la question précédente telle que l'algorithme CC permette aux agents du système de converger.

Question 2.5. Montrer que le modèle de Hegselmann-Krause avec chercheurs de vérité converge.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on se fixe un entier $n \geqslant 2$ et un n-uplet $(q_1, \ldots, q_n)$ de réels non nuls. On note $q = \sum_{i=1}^n q_i$ et $\gamma = \min_{i=1}^n (1/q_i)$. À chaque graphe dirigé ayant n nœuds notés $1, \ldots, n$ et une auto-boucle à chaque nœud, on associe la matrice A définie par

$$A_{i\,j} = \begin{cases} 1/q_i & \text{si } j \in N_i^+ \setminus \{i\} \\ 1 - \big(|N_i^+| - 1\big)/q_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

où N_i^+ désigne l'ensemble des voisins sortants de i (i compris) dans le graphe G.

Question 3.1. Quelle condition nécessaire et suffisante le graphe G doit-il vérifier pour que la matrice A soit stochastique et que son graphe associé soit G ?

On suppose que le graphe G est fortement connexe.

QUESTION 3.2. À quelle condition le vecteur π dont la i-ème composante est égale à

$$\pi_i = q_i/q$$

est-il le vecteur de Perron de A ?

On suppose dorénavant que le graphe G est bidirectionnel connexe avec auto-boucle à chaque nœud et que tout nœud i a au plus $\lfloor q_i \rfloor$ voisins, i.e., $|N_i^+| \leqslant q_i$.

QUESTION 3.3. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles et que, si on les range par ordre décroissant, on a

$$1 - \frac{\gamma}{2n^2} \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 2\gamma - 1.$$

[Indication : on commencera par justifier précisément pourquoi $1 = \lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n > -1$ puis on pourra procéder comme dans la démonstration du théorème de Landau-Odlyzko en reprenant les éléments de la démonstration du théorème 7, chapître 3.]

QUESTION 3.4. En déduire que, pour tout vecteur v tel que $\langle v, \mathbb{1} \rangle_\pi = 0$, on a

$$\|Av\|_\pi \leqslant \left(1 - \frac{\gamma}{2n^2}\right) \|v\|_\pi.$$

QUESTION 3.5. Montrer que, pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$, on a

$$N(v) \leqslant \sqrt{2n/\gamma}\ \|v\|_\pi.$$

On considère l'ensemble $\mathcal{G}$ des graphes bidirectionnels connexes tels que chaque nœud i a une auto-boucle et au plus $\lfloor q_i \rfloor$ voisins ; soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices associées à ces graphes par (1).

On note x le système défini par

$$x(t+1) = A(t)x(t) \tag{2}$$

où $x(0)$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ et où $A(t)$ est une matrice stochastique. On forme alors l'ensemble $\mathcal{S}$ de tous les systèmes x où chaque matrice $A(t)$ appartient à $\mathcal{M}$ et $\mathcal{S}_1$ le sous-ensemble des systèmes de $\mathcal{S}$ dont le vecteur initial $x(0)$ est dans la boule unité, i.e., $\|x(0)\|_\pi \leqslant 1$.

Pour tout réel $s \in]0, 1]$, on définit

$$\mathbf{U}(s) = \sup \left\{ \sum_{t \in \mathbb{N}} (N(x(t)))^s \mid x \in \mathcal{S}_1 \right\}$$

et, pour tout entier naturel θ et tout réel positif r,

$$U(s, r, \theta) = \sup \left\{ \sum_{t=0}^{\theta} (N(x(t)))^s \mid x \in \mathcal{S} \text{ et } \|x(0)\|_\pi^2 \leqslant r \right\}.$$

(*A priori*, $\mathbf{U}(s)$ et $U(s, r, \theta)$ ne sont pas finis.)

Question 3.6. Montrer que $U(s,r,\theta)$ correspond en fait à un maximum et que, pour tout réel positif β, on a

$$U(s,\beta r,\theta)=\beta^{s/2}U(s,r,\theta).$$

Question 3.7. En notant $\mathcal{S}_1^*$ la restriction de $\mathcal{S}_1$ aux systèmes dont le vecteur initial $x(0)$ est dans l'orthogonal de $\mathbb{1}$, i.e., $\langle x(0),\mathbb{1}\rangle_\pi=0$, montrer que

$$\mathbf{U}(s)=\sup\left\{\sum_{t\in\mathbb{N}}(N(x(t)))^s \mid x\in\mathcal{S}_1^*\right\}.$$

Question 3.8.* Montrer que $\mathbf{U}(s)$ est fini et que

$$\mathbf{U}(s)\leqslant\frac{n}{s}\left(\frac{2n}{\gamma}\right)^{s/2+1}.$$

[Indication : on pourra partir d'une des sommes finies de $U(s,r,\theta)$ et utiliserle fait que, pour tout $0\leqslant x,a\leqslant 1$, on a $(1-x)^a\leqslant 1-ax$.]

Question 3.9. En déduire une majoration de la s-énergie des systèmes de $\mathcal{S}$ et comparer ce dernier résultat à la borne supérieure générale sur la s-énergie.