Devoir à rendre le 17 novembre 2016.

On considère un système composé d'un ensemble $[N] = \{1, \cdots, N\}$ d' agents. Le modèle de calcul est celui de rounds : une phase d'envois, une phase de réception où chaque agent i ne peut respectivement émettre et recevoir qu'un seul message sur chacun de ses canaux sortant et entrant, suivie d'une phase finale de mise à jour. L'acheminement des messages n'est pas instantané ; autrement dit, le message qu'un agent i reçoit de j au round t peut être un "vieux" message envoyé par j au round $\tau_{ij}(t)$ avec

$$0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant t\,.$$

On suppose que chaque agent i possède une variable x_i à valeur dans $\mathbb{R}$ et suit un algorithme de combinaison convexe $\mathcal{A}$. Pour des raisons de commodité, on note $x_i(t)$ la valeur de x_i au **début** du round t (et non à la fin du round t comme dans le cours).

Soit $\left(G_t\right)_{t\geqslant 1}$ une suite de graphes de communication et $x(1) \in \mathbb{R}^N$ une configuration initiale. On note G^∞ le graphe des arcs (dirigés) apparaissant une infinité de fois dans la suite $\left(G_t\right)_{t\geqslant 1}$.

La règle de mise à jour de la variable x_i au round t s'écrit alors :

$$x_i(t+1) = \sum_{j\in In_i(t)} w_{i,j}(t)x_j(\tau_{ij}(t)) \ , \tag{1}$$

avec $In_i(t)$ l'ensemble des voisins entrants de i dans le graphe G_t, $w_{i,j}(t) > 0$ et $\sum_{j\in In_i} w_{i,j}(t) = 1$.

On note $A(t)$ la matrice de poids pour le round t associée à l'algorithme $\mathcal{A}$ et au graphe G_t, i.e.,

$$A_{i,j}(t) = \begin{cases} w_{i,j}(t) & \text{si } j \in In_i(t) \\ 0 & \text{sinon} \quad . \end{cases}$$

On suppose alors les propriétés suivantes :

A1: $\forall t \in \mathbb{N}^*$, $A(t)$ est une matrice stochastique.

A2: $\forall t \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [N]$, $A_{i,i}(t) > 0$.

A3: $\exists \alpha \in]0,1],\ \forall (i,j) \in [N]^2$, $A_{i,j}(t) \in \{0\} \cup [\alpha, 1]$.

B1: $\forall t \in \mathbb{N}^*,\ \forall (i,j) \in [N]^2$, $\tau_{ij}(t) \leqslant t$.

B2: $\forall t \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [N]$, $\tau_{ii}(t) = t$.

B3: $\exists \Delta \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{N}^*,\ \forall (i,j) \in [N]^2$, $\tau_{ij}(t) \geqslant \max(0, t-\Delta+1)$.

Question 1. Parmi ces propriétés, quelles sont celles qui sont *de facto* satisfaites ? À quoi correspond le cas des rounds *synchrones* considéré dans le cours ?

Le but de ce problème est d'étendre le théorème de Moreau au cas de ces rounds *partiellement synchrones*. On suppose donc de plus la propriété suivante :

C1: Le graphe G^∞ est fortement connexe.

C2: $\forall t \in \mathbb{N}^*$, le graphe G_t est bidirectionel.

Comme pour les équations différentielles ordinaires d'ordre Δ, on utilise une réduction à un système de Δ équations différentielles ordinaires du premier ordre. Pour cela, pour chaque round $t \geqslant \Delta - 1$, on définit le vecteur $X(t) \in \mathbb{R}^{\Delta N}$ par

$$X_p(t) = x_i(t - \delta + 1) \text{ si } p = \Delta i - \delta + 1, \ \delta \in \{1, \ldots, \Delta\} \text{ et } i \in [N] \ .$$

Question 2. Trouver une matrice $A^\Delta(t)$, de taille $\Delta N \times \Delta N$, telle que, à partir du round $\Delta - 1$,

$$X(t+1) = A^\Delta(t) X(t) \ .$$

On donnera explicitement la valeur de $A^\Delta_{p,q}(t)$ dans les trois cas suivants : (1) $p = q + 1$ et p n'est pas un multiple de Δ, (2) $p = \Delta i$ et $q = \Delta j - t + \tau_{ij}(t)$ et (3) sinon.

Question 3. Parmi les propriétés A1-A3, quelles sont celles qui sont satisfaites par les matrices $A^\Delta(t)$? Peut-on directement utiliser le théorème de Moreau pour ces matrices ?

On se fixe un round $t_0 \geqslant \Delta - 1$ et pour $t \geqslant t_0$, on pose

$$P(t) = A^\Delta(t) \ldots A^\Delta(t_0) \ .$$

Question 4. Si p n'est pas un multiple de Δ, exprimer $P_{p,\Delta j}(t+1)$ en fonction de $P_{p+1,\Delta j}(t)$.

Question 5. Montrer que

$$P_{\Delta i, \Delta j}(t+1) = \sum_{k=1}^{N} A_{i,k}(t+1) P_{p_k, \Delta j}(t) \ ,$$

où pour chaque indice k de cette somme, p_k est un certain entier de $\in \{\Delta(k-1)+1, \ldots, \Delta k\}$ et $p_k = \Delta k$ lorsque $k = i$.

Fixons un indice $j \in [N]$ et étudions l'évolution des coefficients de la Δj-ème colonne des matrices $P(t)$. On pose

$$S^\Delta_j(t) = \{p \in [\Delta N] \mid P_{p,\Delta j}(t) > 0\} \text{ et } S_j(t) = \{i \in [N] \mid P_{\Delta i, \Delta j}(t) > 0\} \ .$$

Question 6. Montrer que $S^\Delta_j(t_0)$ n'est pas vide.

Question 7. Montrer que pour tout $t \geqslant t_0$, on a $S_j(t) \subseteq S_j(t+1)$.

Question 8. Montrer alors que pour tout $t \geqslant t_0$, $S^\Delta_j(t) \subseteq S^\Delta_j(t+1)$.

On définit alors $\alpha_j(t)$ comme le coefficient le plus petit dans la Δj-ème colonne de la matrice $P(t)$, i.e.,

$$\alpha_j(t) = \min\{P_{p,\Delta j}(t) \mid p \in S^\Delta_j(t)\} \ .$$

Question 9. Montrer alors que pour tout $t \geqslant t_0$, on a $\alpha_j(t+1) \geqslant \alpha\, \alpha_j(t)$.

Question 10. Montrer que si $S_j^{\Delta}(t) = S_j^{\Delta}(t+1)$, alors pour chaque agent i dans $S_j(t)$, tous les coefficients $P_{\Delta(i-1)+1,\Delta j}(t), \ldots, P_{\Delta i,\Delta j}(t)$ sont strictement positifs.

Question 11. En déduire que lorsque $S_j^{\Delta}(t) = S_j^{\Delta}(t+1)$, l'ensemble $S_j(t)$ n'a pas d'arc sortant dans le graphe G_{t+1}.

Question 12. On se place dans le cas où $S_j^{\Delta}(t) = S_j^{\Delta}(t+1)$. Montrer que, dans ce cas, si $S_j(t)$ n'a pas d'arc entrant dans le graphe $G(t+1)$, alors $\alpha_j(t+1) \geqslant \alpha_j(t)$.

Question 13. Montrer qu'il existe un round $\theta_j \geqslant t_0$ tel que

$$\forall p \in [\Delta N] \ : \ P_{p,\Delta j}(\theta_j) > 0 \ .$$

Question 14. Montrer que le théorème de Moreau s'étend au cas partiellement synchrone.

Question 15. Quelles sont les extensions envisageables de ce théorème ? (Vous pouvez vous contentez d'en donner les énoncés).