**Devoir à rendre le jeudi 28 novembre.**

## Exercice 1

Montrer que tous les agents qui suivent l'algorithme $CC$ convergent lorsque l'on suppose que les matrices $A(t)$, qui déterminent la dynamique de ces agents, vérifient les hypothèses A1 (stochasticité), A2 (auto-boucles) et A3 (borne inférieure uniforme sur les coefficients $A_{i\,j}(t)$ strictement posififs) et que tous les graphes de communication sont semi-simples. Que peut-on dire de la matrice $A(\infty, 0)$ et du vecteur limite $x^* = \lim_{t\to+\infty} x(t)$ ?

## Exercice 2

On veut étudier l'évolution d'un ensemble de $n$ oscillateurs couplés, c'est à dire reliés par un graphe bidirectionel que l'on appelera graphe de couplage. Ce graphe peut varier au cours du temps; on note $G_t$ le graphe de couplage à l'instant $t$ et $N_i(t)$ l'ensemble des voisins de l'oscillateur $i$ dans ce graphe. Les oscillateurs sont supposés avoir la même fréquence et avoir un décalage de phase uniforme. La dynamique du système constitué de ces $n$ oscillateurs est alors régie par la règle d'évolution suivante :

$$\theta_i(t+1) = \theta_i(t) + \frac{K\Delta T}{\mid N_i(t) \mid} \sum_{j\in N_i(t)} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t))$$

où $K\Delta T$ désigne une constante dans $]0, 1[$.

On suppose d'autre part que toutes phases initiales sont dans un même demi-cercle ouvert, à savoir

$$\epsilon - \pi/2 \leqslant \theta_i(0) \leqslant \pi/2$$

pour un certain $\epsilon \in ]0, \pi/2]$.

Question 1. Montrer que le système se "linéarise" en

$$\theta_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} A_{i\,j}(t)\theta_j(t)$$

pour des $A_{i\,j}(t)$ que l'on précisera.

Question 2. Montrer que, à chaque instant $t$ et pour chaque oscillateur $i$, on a

$$\epsilon - \pi/2 \leqslant \theta_i(t) \leqslant \pi/2$$

et que le système suit l'algorithme $CC$ pour la suite de matrices $(A(t))_{t\in\mathbb{N}}$. Préciser le graphe de communication à l'instant $t$.

Question 3. Montrer qu'il existe une borne inférieure uniforme $\alpha$ sur les coefficients strictement posififs des matrices $A(t)$, i.e., tous les $A_{i\,j}(t)$ vérifient

$$A_{i\,j}(t) \in \{0\} \cup [\alpha, 1].$$

Question 4. En déduire que tous les oscillateurs du modèle de Kuramoto se synchronisent si les graphes de couplage sont infiniment souvent connexes. Donner une borne sur le taux de convergence.

Pour comparer le modèle de Kuramoto avec le modèle bidirectionnel equal-neighbor (EN), on va rechercher une borne $\alpha$ de la forme $\alpha = a\epsilon/n$.

Question 5. Trouver une condition $(*)$ sur $\epsilon$ garantissant qu'à chaque instant $t$ et pour chaque oscillateur $i$, on ait

$$\frac{\sin(\theta_j(t) - \theta_i(t))}{\theta_j(t) - \theta_i(t)} \geqslant \epsilon/4.$$

En déduire que l'on peut choisir la borne $\alpha$ égale à

$$\alpha = \min\left(1 - K\Delta T, \frac{\pi K \Delta T}{24n}, \frac{\epsilon K \Delta T}{4n}\right).$$

[Indication : on pourra d'abord supposer $(*)$ satisfaite puis traiter le cas général.]

On cherche une généralisation de ce résultat pour un système de $n$ agents reliés par un graphe bidirectionel qui peut varier au cours du temps. On note $G_t$ le graphe à l'instant $t$ et $N_i(t)$ l'ensemble des voisins de l'agent $i$ dans ce graphe. La dynamique de ce système est supposée régie par la règle d'évolution :

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \frac{1}{\mid N_i(t) \mid} \sum_{j \in N_i(t)} f_i(\theta_j(t) - \theta_i(t))$$

où chaque $f_i$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $I$ l'intervalle contenant toutes les valeurs initiales $x_i(0)$.

Question 6. En reprenant l'étude ci-dessus, trouver des conditions générales sur les fonctions $f_i$ pour que le système réalise un consensus asymptotique lorsque les graphes $G_t$ sont infiniment souvent connexes.